

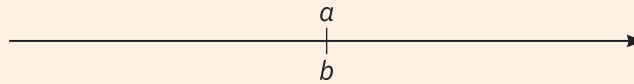
Algebră

8	I.1	Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități
11	I.2	Ecuatii de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații; ecuații echivalente
17		Teste de evaluare
19		Fișă pentru portofoliul individual (A1)
22	I.3	Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute
27	I.4	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
32		Teste de evaluare
33		Fișă pentru portofoliul individual (A2)
35	I.5	Probleme cu caracter aplicativ
36	I.6	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

I

Ecuații și sisteme de ecuații liniare

Numerele reale a și b sunt egale dacă se reprezintă în același punct pe axa numerelor.



Exemple

- 1 Dacă $a = 2$ și $b = \sqrt{4}$, atunci $a = b$, deoarece $\sqrt{4} = 2$.
- 2 Dacă $a = \frac{\sqrt{12}}{2}$ și $b = \sqrt{3}$, atunci $a = b$, deoarece $\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Proprietățile relației de egalitate pe mulțimea numerelor reale

- 1 **Reflexivitatea:** $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 2 **Simetria:** dacă $x = y$, atunci $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 3 **Tranzitivitatea:** dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Egalitatea se păstrează dacă adunăm sau scădem din ambii membri ai unei egalități același termen sau dacă înmulțim/împărțim o egalitate printr-un factor nenul. Cu alte cuvinte, au loc următoarele echivalențe, numite **proprietăți de compatibilitate**, între relația de egalitate și operațiile cu numere reale:

$$\begin{aligned} a = b &\Leftrightarrow a + x = b + x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}; \\ a = b &\Leftrightarrow a - x = b - x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}; \\ a = b &\Leftrightarrow a \cdot x = b \cdot x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}, x \neq 0; \\ a = b &\Leftrightarrow a : x = b : x, \quad \forall a, b, x \in \mathbb{R}, x \neq 0. \end{aligned}$$

De asemenea, dacă se adună/se scad/se înmulțesc/se împart două egalități membru cu membru, se obține tot o egalitate. Altfel spus,

$$\text{dacă } \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}, \text{ atunci } \begin{cases} a + c = b + d \\ a - c = b - d \end{cases} \text{ și } \begin{cases} a \cdot c = b \cdot d \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (c, d \neq 0) \end{cases}.$$

Exemplu. Dacă a, b și c sunt numere reale, astfel încât $a + 3b = 4$ și $b - 2c = 1$, determinați valoarea expresiei $a + 2b + 2c$.

Rezolvare. Scăzând cele două egalități, obținem egalitatea $(a + 3b) - (b - 2c) = 4 - 1$, care este echivalentă cu $a + 2b + 2c = 3$.

Exersare



- 1 Stabiliți dacă următoarele egalități sunt adevărate sau false:

a $\sqrt{9} = 3$; b $\sqrt{16} = 8$; c $5^2 = 10$; d $\frac{3}{4} = 0,75$; e $2,1^2 = 4,41$.
- 2 Se consideră numerele reale a și b , astfel încât $a + b = 3$. Înmulțiți ambii membri ai egalității cu 3. Ce egalitate se obține?

- 3 Se consideră numerele reale a și b , astfel încât $a - b = 1$. Scrieți egalitățile ce se obțin pornind de la egalitatea dată, dacă se înmulțesc ambii membri ai egalității cu:
a 2; **b** 3; **c** 7; **d** -2; **e** -5; **f** -10.
- 4 Se consideră numerele reale a și b , astfel încât $2a + 3b = 7$. Scrieți egalitățile ce se obțin pornind de la egalitatea dată, dacă se înmulțesc ambii membri ai egalității cu:
a 4; **b** -1; **c** 2,5; **d** -1,2; **e** $\frac{5}{6}$; **f** $-\frac{2}{3}$.
- 5 Se consideră numerele reale a și b , astfel încât $2a + 2b = 12$. Determinați:
a $a + b$; **b** $3a + 3b$; **c** $11a + 11b$; **d** $-a - b$; **e** $-4a - 4b$.
- 6 Se consideră numerele reale a , b și c , astfel încât $a + b = 3$, $b + c = 4$ și $c + a = 5$.
a Calculați valoarea expresiei $a + b + c$. **b** Determinați numerele a , b și c .
Indicație: **a** Se adună cele trei egalități.
- 7 Se consideră numerele reale $a = \sqrt{48}$, $b = 1, (6)$, $c = 2\sqrt{12}$ și $d = \frac{5}{3}$.
a Arătați că $a = c$ și $b = d$.
b Fără a efectua calculele, stabiliți dacă următoarea egalitate este adevărată sau falsă:
 $a + b - 3 = c + d - 4$.

Consolidare



- 8 Se consideră egalitatea $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$. Scrieți trei egalități echivalente cu această egalitate.
Indicație: Se adună sau se înmulțesc ambii membri ai egalității cu același număr real nenul.
- 9 Se consideră egalitatea $0, (3)\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{9}}$. Scrieți trei egalități echivalente cu această egalitate.
- 10 Precizați ce proprietăți ale egalității s-au aplicat pentru a obține echivalențele:
a $4(x + 3) = 20 \Leftrightarrow x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 2$;
b $5x - 6 = 7x + 2 \Leftrightarrow -6 = 2x + 2 \Leftrightarrow -8 = 2x \Leftrightarrow -4 = x \Leftrightarrow x = -4$;
c $x(3x - 5) = (\sqrt{3}x - 5)(\sqrt{3}x + 5) \Leftrightarrow 3x^2 - 5x = 3x^2 - 25 \Leftrightarrow -5x = -25 \Leftrightarrow x = 5$;
d $-4x(x + 1) - x(x + 2) = x + 2 \Leftrightarrow -x = x + 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$.
- 11 Numerele reale a , b , c verifică relația $2a - 1,5b + 0,25c = 3,5$. Calculați valoarea expresiei
 $E = 4a - 3b + \frac{c}{2}$.
- 12 Numerele reale a , b , c verifică relația $\frac{a}{5} - \frac{b}{7} + \frac{c}{11} = 3,14$. Calculați valoarea expresiei
 $E = 3a - \frac{65}{91} \cdot b + \left(\frac{\sqrt{5c}}{\sqrt{11}}\right)^2 - a : \frac{1}{2}$.

Aprofundare



- 13 Se știe că $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$. Arătați că $x + y = 3$.
- 14 Se știe că $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = 0$. Calculați $(a + b)^{100} + b^{100}$.
- 15 Se știe că $(a - 1)^2 + (b - 2)^2 = -(c - 3)^2$. Arătați că $(a + b)^3 = c^3$.
- 16 Se consideră triunghiul ABC de laturi $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Arătați că dacă $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$, atunci triunghiul este echilateral.

17 Se dau numerele reale a, b, c astfel încât $a + 3b = 7$ și $2b - 5c = 9$. Determinați:

- a** $a + 5b - 5c$; **b** $a + b + 5c$; **c** $2a + 6b$;
d $3a + 7b + 5c$; **e** $2a + 10b - 10c$; **f** $2a + 15b$.

18 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 3$, astfel încât $a + b + 2c = 4$ și $3a - 2b + c = 7$. Arătați că:

- a** $4a - b + 3c = 11$; **b** $11a - 4b + 7c = 29$; **c** $a + c = 3$;
d $a - b = 2$; **e** $\frac{a + b + 2c}{2a - 3b - c} = \frac{4}{3}$; **f** $\frac{5a + 12b + 8c}{17a - 3b + 2c - 12} = \frac{3}{4}$.

Probleme de șapte stele



19 Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x(x^2 - 2x + 5) = 10$. Arătați că $x = 2$.

20 Fie numerele reale x, y astfel încât $x(y^2 + 2) = y(x^2 + 2)$. Arătați că, dacă $x \neq y$, atunci $xy = 2$.

21 Fie numerele reale a, b, c , oricare două diferite între ele. Demonstrați că:

- a** $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$;
b $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$;
c $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} = \frac{1}{abc}$.

O ecuație de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, se numește *ecuație de gradul I cu o necunoscută*. Numerele reale a și b se numesc *coeficienți* (a este coeficientul necunoscutei, iar b se numește și termen liber), iar x se numește *necunoscută* sau *variabilă*.

Se numește *soluție* a ecuației $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, un număr $x_0 \in \mathbb{R}$ pentru care propoziția $ax_0 + b = 0$ este adevărată.

A *rezolva o ecuație* înseamnă a determina toate soluțiile sale. Aceste soluții formează *mulțimea soluțiilor* ecuației date și se notează, de regulă, cu S .

Dacă după o ecuație urmează o precizare de forma $x \in M$, aceasta indică mulțimea în care ia valori necunoscuta. Se spune că ecuația dată este definită pe mulțimea M (sau că se rezolvă în mulțimea M). Dacă nu se face nicio precizare, se consideră $M = \mathbb{R}$.

Exemple

- 1 Ecuația $2x - 6 = 0$ are soluția $x_0 = 3$, deoarece $2 \cdot 3 - 6 = 0$ și $3 \in \mathbb{R}$.
- 2 Ecuația $3x - 9 = 0$, $x \in \mathbb{N}$, nu are soluții, deoarece propoziția $3x_0 + 9 = 0$ este adevărată doar dacă $x_0 = -3$, iar $-3 \notin \mathbb{N}$. Se observă că ecuația $3x + 9 = 0$, $x \in \mathbb{Q}$, are soluția $x_0 = -3$.

Pentru a rezolva o ecuație, adică pentru a afla soluțiile sale, putem folosi proprietățile relației de egalitate, obținând egalități echivalente. În general, vom încerca să ajungem la o egalitate de forma $x = a$, care este cea mai simplă ecuație și care are doar soluția $x_0 = a$.

Două ecuații definite pe aceeași mulțime se numesc *echivalente* dacă au aceleași soluții. În mod evident, două ecuații echivalente au aceeași mulțime a soluțiilor.

Pentru a obține ecuații echivalente cu o ecuație dată, putem aplica următoarele reguli:

- trecem termeni dintr-un membru în celălalt cu semn schimbat;
- adunăm/scădem același număr din ambii membri ai ecuației;
- înmulțim/împărțim ambii membri ai ecuației cu un factor nenul.

Pentru rezolvarea ecuației $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se parcurg următorii pași:

- scădem pe b din ambii membri ai ecuației și obținem $ax = -b$;
- cum $a \neq 0$, înmulțim ambii membri cu $\frac{1}{a}$ și obținem $x = -\frac{b}{a}$;
- întrucât $-\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$, soluția ecuației este numărul $-\frac{b}{a}$ și scriem $S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple: 1 $2x + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x = -18 \mid :2 \Leftrightarrow x = -9 \Rightarrow S = \{-9\}$.

2 $\sqrt{3}x - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 12 \mid : \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} \Rightarrow S = \{4\sqrt{3}\}$.

3 $(3 - \sqrt{5})x - 4 = 0 \Leftrightarrow (3 - \sqrt{5})x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \Leftrightarrow x = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{4} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{5} \Leftrightarrow S = \{3 + \sqrt{5}\}$.



1 Precizați care dintre următoarele relații sunt ecuații:

- a** $x-4=0$; **b** $y+1=0$; **c** $a-4=0$;
d $2 \cdot 4+1=9$; **e** $x-3 < 2$; **f** $2x+5=-1$.

2 Completați tabelul, conform modelului:

Ecuția	$x+5=0$	$2x-3=0$	$3y=0$	$4a+1=0$	$-2+x=0$	$\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0$
Necunoscuta	x					
Coeficientul necunoscutei	1					
Termenul liber	5					

3 Scrieți ecuația $ax+b=0$ pentru:

- a** $a=2, b=3$; **b** $a=3, b=-1$; **c** $a=-1, b=1$; **d** $a=1, b=0$;
e $a=2,3; b=1,3$; **f** $a=\frac{2}{3}, b=-\frac{1}{2}$; **g** $a=\sqrt{3}, b=-1$; **f** $a=\frac{\sqrt{5}}{2}, b=0$.

4 Dați două exemple de:

- a** ecuații cu coeficientul necunoscutei egal cu 4;
b ecuații cu termenul liber egal cu -1;
c ecuații cu coeficienții egali;
d ecuații cu coeficienții exprimați prin numere reale opuse.

5 Verificați dacă:

- a** numărul 2 este soluție a ecuației $2x-4=0$;
b numărul -1 este soluție a ecuației $3x-3=0$;
c numărul 2,5 este soluție a ecuației $3x-7,5=0$;
d numărul $\frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $-4x+2=0$.

6 Precizați care dintre ecuațiile următoare admit soluția -3:

- a** $x+3=0$; **b** $3x+9=0$; **c** $-7x-21=0$;
d $-x+3=0$; **e** $12x-4=0$; **f** $|-5| \cdot x+15=0$;
g $(\sqrt{2}+1)x-3+2\sqrt{2}=0$; **h** $-4x+12=0$; **i** $\sqrt{2}x+\sqrt{18}=0$.

Rezolvare: Numărul real $x_0 = -3$ este soluție pentru o ecuație dacă, înlocuind necunoscuta x cu -3 în ecuație, obținem o propoziție adevărată. Ca urmare:

- b** $3 \cdot (-3) + 9 = 0$ este propoziție adevărată, deci ecuația dată admite soluția $x_0 = -3$;
e $12 \cdot (-3) - 4 = 0$ este propoziție falsă, deci ecuația nu admite soluția $x_0 = -3$.

7 Arătați că ecuațiile următoare au soluția -2:

- a** $2x+4=0$; **b** $-1+3x=4x+1$; **c** $5x-3=x-11$;
d $10(x-3)+2=4(8x+4)$; **e** $2,5x+2=3(1,5x+2)$; **f** $3x+5+4x=-9$;
g $(5-\sqrt{7})x+10=\sqrt{28}$; **h** $\frac{2x+7}{3}=1+\frac{x+2}{2}$; **i** $\frac{2x+3}{x+3}=\frac{2x+5}{x+1}$.

8 Rezolvați ecuațiile, apoi faceți proba soluției găsite:

- a** $10x=40$; **b** $-7x=21$; **c** $16x=48$; **d** $9x+27=40$;
e $-3x+15=0$; **f** $3=-2x+7$; **g** $22x+44=0$; **h** $11x+29=95$;
i $-18+6x=6$; **j** $-x+7=-23$; **k** $4(x-7)=0$; **l** $-3(x+6)=6$.

9 Rezolvați ecuațiile, apoi faceți proba soluției găsite:

a $-6+3x=0$;	b $-3x+3=0$;	c $-9x+18=0$;
d $5x-20=0$;	e $\sqrt{5}x+\sqrt{20}=0$;	f $\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$;
g $\sqrt{2}x-\sqrt{18}+2\sqrt{2}=0$;	h $(5-\sqrt{7})-5+\sqrt{7}=0$;	i $x\sqrt{2}-\sqrt{3}=0$.

10 Rezolvați ecuațiile:

a $2x-7=13$;	b $-7+6x=4x+15$;	c $5x-11=x-3$;
d $2,5x-4,7=3(1,5x+2)$;	e $3x-5+4x=18$;	f $8x+20=3x$;
g $10(x-3)=4(6x+7)-2$;	h $(2+\sqrt{3})x-2+\sqrt{3}=0$;	i $\sqrt{3}x+4=1-2\sqrt{3}x$.

11 Determinați soluțiile ecuațiilor:

a $7x+4+2(x-5)=8(x+1)$;	b $2(x+3)-5(2x+1)=12x-19$;
c $3(2x+3)+2(3x+2)=9x+4$;	d $5(x-2)-2x+3(x+1)=6+7x$;
e $-3x+5+6(-x+1)=-4(x+6)$;	f $6(x+2)-2(2x+3)+4x=36$.

12 Stabiliți dacă următoarele ecuații sunt echivalente:

a $3-2x=-7, x \in \mathbb{R}$	și	i $11(x-4)=3^2+2, x \in \mathbb{R}$;
b $6+5x=2(-3+x), x \in \mathbb{Z}$,	și	j $x+18=2(-1-x)+8, x \in \mathbb{Z}$;
c $7x-5(x-1)=10x-3, x \in \mathbb{R}$,	și	k $4x-3(2-x)=4, x \in \mathbb{R}$;
d $13x+41=5(2x+7)+3, x \in \mathbb{R}$,	și	l $9(x-2)+14=-2(3-4x)+1, x \in \mathbb{R}$.

13 Rezolvați ecuațiile:

a $3(x+5)-6(x-2)=4(x+2)-5(x-4)+1$;	b $2(2x+7)+3(x-1)=6(x-3)+18$;
c $15(x-1)+4(2-3x)=11-2(x+4)$;	d $2x+5+3(3x-1)=8(1-7x)+2+3x$;
e $10(3-x)+6(x+3)=19+7(2x-1)$.	

Consolidare



14 Rezolvați ecuațiile:

a $-13x+4=21+4x$;	b $7x-16=16+5x$;
c $0,3x-0,6=0,1x+0,8$;	d $x \cdot \sqrt{(-1)^2} + x \cdot \sqrt{(-2)^2} + x \cdot \sqrt{(-3)^2} = 6$;
e $(4x-3) \cdot (-3)=6x+27$;	f $(1^2-x)+(2^2-x)+(3^2-x)=50$;
g $5(x-3)+11=2x+2$;	h $11(1-x)+7x=15$;
i $6(x+2)-8=3x+14$;	j $7x-9=2(3x+1)$;
k $5(x-0,4)=19-2x$;	l $23x-41=7(x+3)+2$;
m $44-13x=100-2(8x-5)$;	n $3(x-2)+2(x-3)=4x-12$.

15 Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care enunțurile de mai jos devin propoziții adevărate:

a Ecuația $2x+a=0$ are soluția -5 .	b Ecuația $-ax+12=0$ are soluția 1 .
c Ecuația $ax+a+1=0$ are soluția 2 .	d Ecuația $3x-a+2=0$ are soluția $\frac{1}{3}$.
e Ecuația $a^2x+9=0$ are soluția -1 .	f Ecuația $a^2x-32=0$ are soluția 4 .

16 Determinați numărul real m pentru care:

a ecuația $2x+m=4x+3$ are soluția -2 ;
b ecuația $2mx+5(x-1)=7x+1-3m$ are soluția 1 ;
c ecuația $m(x+2)+3(x-1)=mx-3$ are soluția 0 ;
d ecuația $2x-m(x+3)=7mx+12$ are soluția 5 ;
e ecuația $-3x+4(mx-1)=6x+2-7(m+2)$ are soluția 3 ;
f ecuația $3(m-1)(x+2)-2(2m-1)(2x+1)=7x+3mx-5$ are soluția -3 .

17 Determinați valorile $m \in \mathbb{R}$ pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

- a** $-2-4(3-x)=4-3(x-1)$ și $m-x(m+1)=1$;
b $2(3x-4)-4m=x(m+1)$ și $x-5(x-1)=x \cdot (-1)^{2011}$;
c $3-x=2(x-5m)+m$ și $2(3x-2m)+3=5(x+1)$;
d $x-3(2x-5)=5(x-1)$ și $m(x-1)=m$;
e $mx-1+2(-mx+1)=x-m$ și $3x+4-2(x-1)=4(x-3)+3(6-x)$.

18 Rezolvați următoarele ecuații:

- a** $5(3x-2)+3x-6(8x-13)=16(9-2x)-78$;
b $2(3x+4)-5(2x-3)-2=7(2x-4)+2(8-5x)+3x$;
c $2(3x-4)+5(6x-7)-3x=9(x+10)+11(x+12)+8$;
d $3(6x-5)-2(4x+3)+13=-2(-4x+9)+2x-5(3x-2)$.

19 Determinați soluțiile ecuațiilor:

- a** $6x+3+2(x-4)=7(x+2)$; **b** $2(2x+1)-3(3x-5)=4x-19$;
c $4(3x-5)+3(4x-7)=10x-13$; **d** $5(2x-1)-3x+6(x+2)=15+9x$;
e $-2x+4+5(-x+2)=-3(2x-7)$; **f** $5(2x+1)-2(3x+2)+3x=13-5x$.

20 Rezolvați următoarele ecuații:

- a** $5(2x-1)+3(x-1)-6(7x-12)=15(8-x)-84$;
b $2(3x+4)-3x-2=6(2x-3)+2(3-4x)+5(2x-3)$;
c $4(9x-4)+2(2x-7)-7x=3(3x-10)+5(x-22)-4$;
d $2(5x-4)-(3x+2)+11=-3(-5x+10)+3x-6(4x-3)$.

21 Rezolvați următoarele ecuații:

- a** $\frac{2x-4}{7}=\frac{2-x}{3}$; **b** $\frac{2x+5}{3}=\frac{x-5}{4}$; **c** $\frac{1}{2}+\frac{2x-5}{4}=x$;
d $\frac{7x-5}{3}-\frac{4x+1}{2}=0$; **e** $1+\frac{3x-2}{4}=\frac{2x+5}{2}$; **f** $\frac{5x-7}{8}-\frac{x-1}{4}=\frac{11-x}{2}$;
g $\frac{x}{5}-\frac{3-x}{10}=\frac{x+3}{2}$; **h** $\frac{4x-6}{12}=\frac{x+1}{4}-\frac{x}{6}$; **i** $\frac{2x+3}{7}-\frac{x}{2}=\frac{3x-6}{14}$.

22 Aflați soluțiile ecuațiilor:

- a** $\frac{x+3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2x+7}{10}=1$; **b** $\frac{11x-4}{4}+\frac{1-x}{2}=6-x$;
c $\frac{x-4}{6}-\frac{x}{5}+\frac{3}{2}=\frac{2x-1}{10}$; **d** $\frac{x+2}{3}-\frac{2x+3}{4}+\frac{5}{3}=1\frac{5}{6}+\frac{7x-11}{12}$;
e $\frac{1-x}{3}+\frac{1+3x}{4}=2x-1$; **f** $\frac{7x-12}{5}+\frac{19-6x}{7}=\frac{x}{2}+\frac{x-1}{5}$.

23 Rezolvați următoarele ecuații:

- a** $\frac{x+3}{4}+\frac{2x+1}{3}=\frac{x-3}{6}+\frac{3x+1}{12}$; **b** $\frac{5x-1}{8}-\frac{x+2}{2}+3=\frac{3x-7}{4}-\frac{x}{2}$;
c $\frac{3x-7}{20}-\frac{1}{10}=\frac{2-x}{5}+\frac{x-3}{4}$; **d** $\frac{11}{16}+\frac{x-3}{4}=\frac{3-2x}{8}+\frac{1}{2}$;
e $\frac{2}{5}(x-3)+\frac{4x+6}{15}=\frac{2x+7}{10}-1\frac{1}{30}$; **f** $\frac{4x-3}{14}-\frac{2x+3}{7}=\frac{x-1}{2}+\frac{5}{14}$.

24 Rezolvați ecuațiile:

- a** $\frac{x}{2}+\frac{2x-1}{3}+\frac{3x-2}{4}+\frac{4x-3}{5}=\frac{x}{5}+\frac{2x+1}{4}+\frac{3x+2}{3}+\frac{4x+3}{2}$;
b $\frac{2x-3}{4}+\frac{3x+4}{5}+3\cdot\frac{x+1}{2}=2\cdot\frac{3x+2}{5}+x+\frac{3-7x}{4}$;
c $\frac{3x+11}{4}+2\cdot\left(\frac{2x-7}{5}+\frac{3x-1}{2}\right)=\frac{9(x+4)}{10}-\frac{2(x+3)}{5}+\frac{5x+1}{10}$;

$$d \quad \frac{3x+8}{12} - \frac{2x+3}{15} + \frac{1}{6} = 2 \left(\frac{x+5}{3} - \frac{9+2x}{5} \right) + \frac{1}{5} - \frac{3x+2}{20}.$$

$$e \quad \frac{x-5}{2} - \frac{x-4}{3} + \frac{x-3}{4} = \frac{5-x}{4} + \frac{4-x}{3} + \frac{3-x}{2};$$

$$f \quad 1-x + \frac{2-x}{2} + \frac{3-x}{3} = \frac{4+x}{4} + \frac{5+x}{5} + \frac{6-x}{6}.$$

25 Determinați soluțiile ecuațiilor:

$$a \quad x\sqrt{2} + x\sqrt{8} + x\sqrt{32} = \sqrt{4} + \sqrt{16} + \sqrt{64};$$

$$b \quad \sqrt{5}(x+4) + 2\sqrt{5}(x-2) = \sqrt{15};$$

$$c \quad x(2\sqrt{2} - \sqrt{3}) + 2x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 6 + \sqrt{3};$$

$$d \quad x\sqrt{2} + 2x(\sqrt{8} - 3) = 20 - 6x;$$

$$e \quad 2x(2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1)(x+2) = 2x + 6;$$

$$f \quad 2(x + \sqrt{2} - \sqrt{5}) + 3 = x(\sqrt{5} - \sqrt{2}).$$

Aprofundare



26 Determinați soluțiile ecuațiilor:

$$a \quad \frac{3x+10}{4} - \frac{7x+5}{2} = 2 \left[\frac{9x-4}{3} - 3 \left(\frac{x}{2} + \frac{7x-6}{4} \right) \right];$$

$$b \quad \frac{x+1}{2} - \left[\frac{3}{4} \left(\frac{2x-5}{3} - \frac{x+3}{9} \right) \right] = \frac{2x-7}{3} - \frac{3x-5}{2};$$

$$c \quad 2 \left[2x - 5 \left(\frac{3x+1}{4} - \frac{2x+1}{3} \right) \right] = (x+1) \left(\frac{x+1}{2} - \frac{2x+1}{4} \right);$$

$$d \quad 3 \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left[2 + 3 \left(2x - \frac{5x+1}{3} \right) \right] - \frac{x}{2} \right\} = \frac{4x+25}{6};$$

$$e \quad \left[x - \frac{1}{3} \left(\frac{2x+3}{4} - \frac{3x-2}{5} \right) \right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{x+5}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2x-3}{5} + \frac{13-x}{2} \right);$$

$$f \quad 2x - \frac{1}{3} \left(\frac{6x-7}{4} - \frac{5x-2}{3} \right) = \frac{3x}{2} - \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{6} \right) \right].$$

27 Rezolvați ecuațiile:

$$a \quad 2x(4 + 2\sqrt{3}) - \sqrt{3}(5x + 3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}(3\sqrt{3} - x) + 2(4x - 9);$$

$$b \quad (\sqrt{5} - 2\sqrt{3}) \cdot x + 2x(\sqrt{5} + \sqrt{3}) = \sqrt{125} + 2x\sqrt{5};$$

$$c \quad 2 - \sqrt{3} + 2x(2 - \sqrt{3}) = 4(x - \sqrt{3}) + \sqrt{27};$$

$$d \quad x\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + x(1 + \sqrt{2}) + x(3 + 2\sqrt{2}) = 5(3 + \sqrt{2}) - 2(3 + 2\sqrt{2});$$

$$e \quad \sqrt{5} - 2 + x(\sqrt{5} - 2) = x(2 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5} + 2);$$

$$f \quad \sqrt{3}(\sqrt{2}x + 1) + \sqrt{2}(\sqrt{3}x + 1) = 2x(\sqrt{6} + 1) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

28 Rezolvați ecuațiile:

$$a \quad |x| = 1;$$

$$b \quad |x| = 8;$$

$$c \quad |-x| = 2;$$

$$d \quad |x| = 0;$$

$$e \quad |x| = -1;$$

$$f \quad |-x| = -1;$$

$$g \quad |x| = -2;$$

$$h \quad |-x| = -3;$$

$$i \quad |-x| = 5.$$

29 Rezolvați ecuațiile:

$$a \quad |x-2| = 5;$$

$$b \quad |x+3| = 3;$$

$$c \quad |-x+2| = 1;$$

$$d \quad |2x+4| = 8;$$

$$e \quad |3x-7| = 5;$$

$$f \quad |-x+4| = 11;$$

$$g \quad |-2x-6| = 12;$$

$$h \quad |12-x| = -24;$$

$$i \quad |-5x+10| = -20.$$

30 Rezolvați ecuațiile:

$$a \quad \left| \frac{x-2}{3} \right| = 4;$$

$$b \quad \left| \frac{x+1}{5} \right| = 1;$$

$$c \quad \left| \frac{2x+1}{3} \right| = 5;$$

$$d \quad \left| \frac{x}{2} + 1 \right| = \frac{3}{2};$$

$$e \quad \left| \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \right| = 3;$$

$$f \quad \left| \frac{1-x}{3} + 2 \right| = \frac{1}{6};$$

$$g \quad \left| \frac{\sqrt{2}x - \sqrt{8}}{3} \right| = \sqrt{2};$$

$$h \quad \left| \frac{\sqrt{27}x}{3} + \sqrt{12} \right| = 2\sqrt{3};$$

$$i \quad \left| \sqrt{5} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{45}.$$

31 Rezolvați ecuațiile:

a $\|x-2|-1|=1$; **b** $\|x-5|-8|=4$; **c** $\|2x+3|+1|=5$; **d** $\|6-x|+2|=4$; **e** $\|-3x-2|-2|=7$;
f $6-|x-2|=3$; **g** $2+|2x-3|=4$; **h** $13-|2x+1|=10$; **i** $|9-|-2-3x||=1$.

32 Rezolvați ecuațiile: **a** $|x-2|=3$; **b** $\|x-2|-2|=3$; **c** $\||x-2|-2|-2|=3$.

33 Rezolvați ecuațiile:

a $(x-1)+2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)=100$; **b** $(x-1)+(x-2)+(x-3)+\dots+(x-11)=0$;
c $x+2x+3x+\dots+10x=550$; **d** $(1-x)+(1-2x)+(1-3x)+\dots+(1-10x)=65$.

34 Rezolvați următoarele ecuații:

a $1 \cdot x + 2 \cdot x + 3 \cdot x + \dots + 2020 \cdot x = 1010 \cdot 2021$;
b $1 \cdot x - 2 \cdot x + 3 \cdot x - \dots - 2020x + 2021x = 2022$;
c $x+1+\frac{x+2}{2}+\frac{x+3}{3}+\dots+\frac{x+2020}{2020}+\frac{x+2021}{2021}=2021$;
d $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\dots+\frac{x}{2019 \cdot 2020}+\frac{x}{2020 \cdot 2021}=2020$.

35 Rezolvați ecuațiile:

a $0,1x+0,01x+0,001x+0,0001x=2^2-0,667$;
b $x+2x+3x+\dots+20x=100x-[(-1)^1+(-2)^2+(-3)^3+(-4)^4]$;
c $\frac{x+1}{1 \cdot 3}+\frac{x+1}{3 \cdot 5}+\frac{x+1}{5 \cdot 7}+\dots+\frac{x+1}{2019 \cdot 2021}=\frac{1010}{2021}$;
d $\frac{x}{\sqrt{2}+1}+\frac{x}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{x}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{x}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}=4004$.

36 Determinați pentru ce valori ale numărului real m ecuațiile $2mx+m+2=0$ și $2mx+2m+1=0$ au aceeași soluție.

37 Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile $(2a+m)x=bx+m$ și $(2b+m)x=ax-m$ sunt echivalente.

38 Aflați soluțiile următoarelor ecuații:

a $\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$; **b** $a^2b-\frac{a+x}{b}=ab^2-\frac{b+x}{a}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$;
c $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x+a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2(x+b)}{a-b}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq \pm b$;
d $\frac{x-1}{a+b-c}=\frac{x+1}{a-b+c}$, unde $a, b, c > 0$ sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Probleme de șapte stele



39 Fie $a, b, c > 0$. Rezolvați ecuația $\frac{x-a-b}{ab}+\frac{x-b-c}{bc}+\frac{x-c-a}{ca}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$.

40 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0$. Demonstrați că ecuațiile $ax+b=0$ și $cx+d=0$ sunt echivalente dacă și numai dacă $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

41 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\dots+\frac{1}{1+2+3+\dots+x}=\frac{400}{201}.$$

42 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\sqrt{1}+\sqrt{1+3}+\sqrt{1+3+5}+\dots+\sqrt{1+3+5+\dots+(2x+1)}=201 \cdot 10055.$$

Testul 1

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $2x + 1 = -5$; **b** $0,5x - 1,3 = 2,7$; **c** $\sqrt{3}x = 2\sqrt{6}$.

(2p) 2 Rezolvați ecuația $2(x + 1) - 3(2 - x) = x + 3(2x + 1)$.

(1p) 3 Arătați că $a = -1$ este soluție a ecuației $3 + 2x - (x - 8) = -3x + 7$.

(1p) 4 Rezolvați ecuația $3(2x - 1) + 3(x + 1) - 2(x - 5) = 15(8 - x)$.

(1p) 5 Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$-2x + 3(x - 3) + \frac{x - 1}{2} = \frac{x + 1}{3} - \frac{x + 3}{6} \text{ și } mx - 3 + 2x = 2(m - x) + 5.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația $|3x + 5| = 8$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $5x - 2 = -7$; **b** $4 - 2,3x = -0,6$; **c** $\sqrt{2} + 2x = \sqrt{18}$.

(2p) 2 Rezolvați ecuația $3(x - 3) - 2(1 - x) = 2x - 2(x + 4) + 7$.

(1p) 3 Arătați că $a = -2$ este soluție a ecuației $(-2x - 1) - 4x + 6 = -2x^2 + 9 - 8x$.

(1p) 4 Rezolvați ecuația $\frac{4x - 5}{14} = \frac{3}{14} + \frac{x - 1}{2} + \frac{2x + 3}{7}$.

(1p) 5 Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$\frac{2x - 1}{3} + 3x - 4 = \frac{1 - 2x}{4} - \frac{5}{12} \text{ și } 2 + mx - 3x = x(3m - 2) + 4.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația $\left| \frac{3x + 1}{2} \right| = 10$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(3p) 1 Rezolvați ecuațiile:

a $3x + 4 = 10$;

b $0,2x + 3,5 = -0,7$;

c $\sqrt{5}x + 1 = \sqrt{20} + 1$.

(2p) 2 Rezolvați ecuația $2(2x + 1) - 3(3x - 5) = 4(x - 5) - 8$.

(1p) 3 Arătați că $a = 3$ este soluție a ecuației $\frac{5x+1}{2} + \frac{x+1}{4} = \sqrt{5}x - \sqrt{45} + \sqrt{81}$.

(1p) 4 Rezolvați ecuația $\frac{4x-12}{5} + \frac{17-6x}{7} = \frac{x}{2} + \frac{-2x-1}{5} - \frac{2}{7}$.

(1p) 5 Determinați valorile numărului real m pentru care ecuațiile următoare sunt echivalente:

$$1 + \frac{3x+1}{4} = 2x + \frac{x-1}{3} \text{ și } mx - 2x + 3 = x(2m-3) + m + 2.$$

(1p) 6 Rezolvați ecuația $||3x+2|+1|=6$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.



Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele:

Clasa a VII-a:

A1

Tema I.1: Ecuații de forma $ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Ecuații echivalente

(1,5 p) 1 Completați pe fișă spațiile punctate cu răspunsul corect.

- a** Soluția ecuației $x + 2 = 10$ este
- b** Soluția ecuației $3x + 4 = -5$ este
- c** Soluția ecuației $\frac{x}{6} = \frac{2}{3}$ este

(1,5 p) 2 Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

- a** Mulțimea soluțiilor ecuației $3(2x + 1) - 3x = 0$ este $S = \{1\}$. **A** **F**
- b** 0 este soluție a ecuației $\frac{x-2}{2} = \frac{x-3}{3}$. **A** **F**
- c** Ecuația $3(x + 1) - 4x = 1 - x$ nu are soluții reale. **A** **F**

(2 p) 3 Uniți prin săgeți fiecare enunț din coloana **A** cu rezultatul corespunzător din coloana **B**.

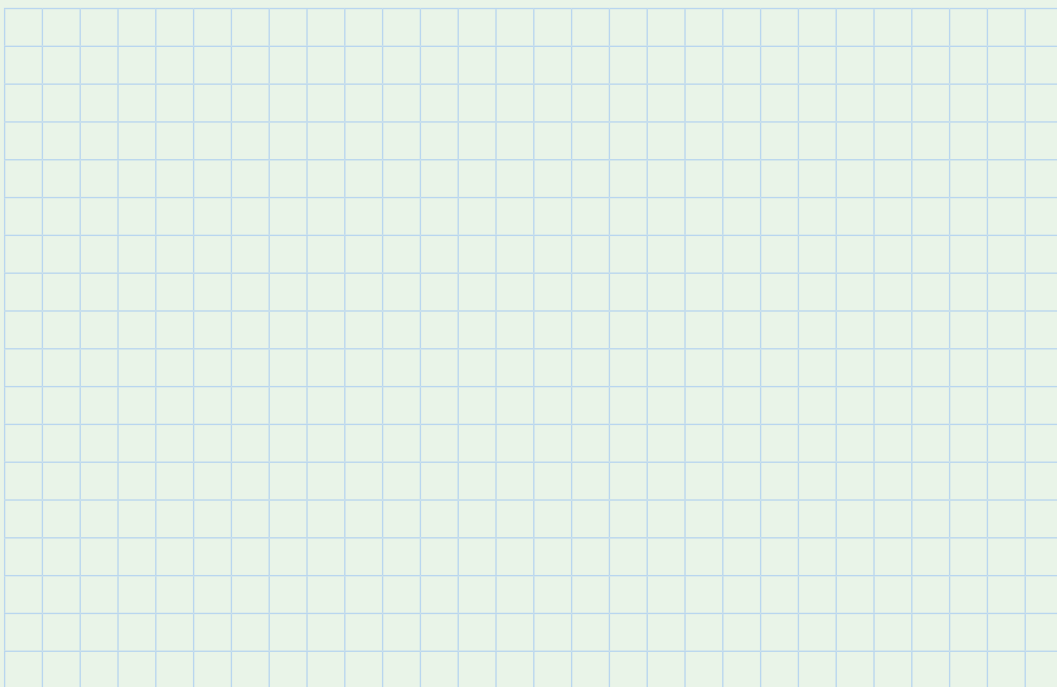
- | A | B |
|---|------------------|
| a Soluția ecuației $2x = (3 + 1)^2$ | 1 $\{2\}$ |
| b Soluția ecuației $3(x + 2) = 27$ | 2 $\{0\}$ |
| c Soluția ecuației $2x + 3 = 3x + 2$ | 3 $\{8\}$ |
| d Soluția ecuației $\frac{x+2}{4} = \frac{x+3}{5}$ | 4 $\{7\}$ |
| | 5 $\{1\}$ |

La problemele 4 și 5 scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2 p) 4 Rezolvați în mulțimea numerelor naturale următoarele ecuații:

a $2(x+3) - 3(x-1) = 3x - 2(2+x)$;

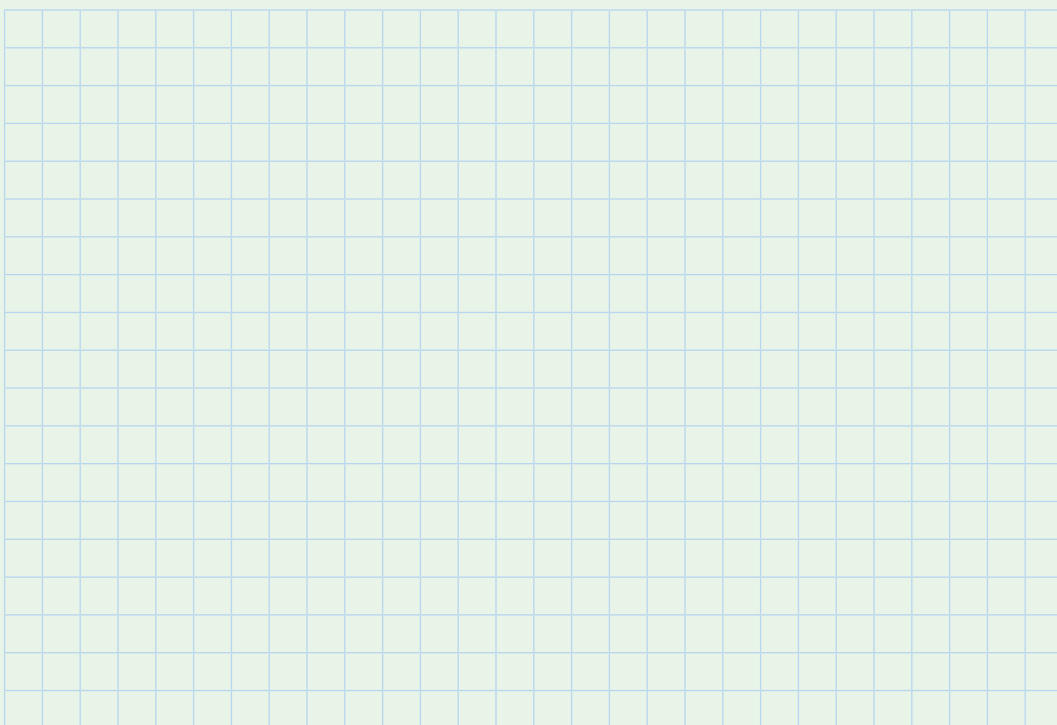
b $|2x-7| = 9$.



(2 p) 5 Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a $\frac{2(x-2)}{5} + \frac{4x+14}{15} = \frac{2}{5} + \frac{2x+7}{10} - \frac{1}{2}$;

b $\frac{\sqrt{2}x+3}{3} - \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3x}{\sqrt{18}} = \frac{9-\sqrt{2}x}{6}$.



NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

